巧用极限思想　　揭秘函数零点

陈凌燕　福建省厦门市海沧中学 361022
蔡海涛　福建省莆田第二中学　 351131

函数零点问题是高考数学的一大热点，特别是以含超越式（$\mathrm{e}^x,\ln x$）的初等函数为载体的问题，往往以压轴题的形式呈现，难度较大. 这类问题通常利用零点存在定理，即要找到一个区间，使得这个区间的两个端点处的函数值异号，从而证明存在零点.

本文为了行文方便，类比函数零点的定义，定义正点：满足 $f(x)>0$ 的实数 x；负点：满足 $f(x)<0$ 的实数 x. 初等函数在定义域上必连续[1]，零点存在定理可简述为：一正一负中必有零点. 解题过程中找到满足条件的正点或负点并不容易，这需要我们对函数的变化趋势有充分的判断，即知道函数的极限. 基于极限思想，找到影响函数趋势的关键，从而得到放缩找点的方向. 一般地，对任意 $\alpha>0$，$a>1$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^\alpha}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\ln x}=+\infty$，称当 $x\to+\infty$ 时 a^x 为 x^α 的高阶无穷大量，x^α 为 $\ln x$ 的高阶无穷大量，有 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha}{\ln x}=-\infty$，称当 $x\to0^+$ 时 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha$ 为 $\ln x$ 的高阶无穷大量. 下例谈利用极限思想解决零点问题.

一、含 e^x 的初等函数

1. 根据函数单调性放缩

例 1（2016 年高考全国课标 I 卷・理 21（1））已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

分析：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 没有零点. 这两种情况比较简单，本文不做赘述，主要说明当 $a>0$ 时的情况.

由 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+2a(x-1)=(x-1)\left(\mathrm{e}^x+2a\right)$ 得当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=-\mathrm{e}<0$，根据极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，可以判断 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，有两个零点，接下来只需在相应区间内找到正点，即可利用零点存在定理解决问题. 在区间 $(1,+\infty)$，易得 $f(2)=a>0$，2 是满足题意的一个正点. 而对区间 $(-\infty,1)$，不易用观察法得出正点.

方法一：缩小 x 的范围，将 $(x-2)\mathrm{e}^x$ 放缩为某一常数，如当 $x<0$ 时，因为 $(x-2)\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $(x-2)\mathrm{e}^x>-2$，则 $f(x)>-2+a(x-1)^2$，令 $-2+a(x-1)^2=0$，得 $x=1\pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，只需取 $x_0<0$ 且 $x_0<1-\sqrt{\dfrac{2}{a}}$，则 $f(x_0)>-2+a(x_0-1)^2>0$，所以 x_0 就是满足题意的一个正点了.

方法二：当 $x<0$ 时，因为 $\mathrm{e}^x<1$，所以 $(x-2)\mathrm{e}^x>x-2$，取 $x<-2$，则 $x-2>2x$，$a(x-1)^2>ax^2$，所以 $f(x)>x-2+a(x-1)^2>2x+ax^2$，令 $2x+ax^2=0$，得 $x=-\dfrac{2}{a}$，只需取 $x_0<-2$ 且 $x_0<-\dfrac{2}{a}$，则 $f(x_0)>2x_0+a{x_0}^2>0$，所以 x_0 就是满足题意的一个正点了.

评析　基于极限思想，对函数式的各项极限逐个判断，一些不影响函数变化趋势的项，我们可以通过缩小变量区间的方式进行放缩，再通过解方程得到所需要的正点（负点）.

2.利用常见不等式“$\mathrm{e}^x\ge 1+x$”放缩

例 2　（2017 年高考全国课标Ⅰ卷·理 21（2））已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$，若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

分析：$f'(x)=(ae^x-1)(2e^x+1)$，当 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 至多有一个零点.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=-\ln a$ 处取得最小值 $f(-\ln a)=1-\dfrac{1}{a}+\ln a$，当 $0<a<1$，$f(-\ln a)<0$，可以判断 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$f(x)$ 有两个零点，只需在相应区间内找到正点，即可利用零点存在定理进行求解了.

在区间 $(-\infty,-\ln a)$，因为 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x>-2\mathrm{e}^x-x$，当 $x<0$ 时，有 $-2\mathrm{e}^x-x>-2-x$，令 $-2-x=0$，得 $x=-2$，则 $f(-2)>-2-(-2)=0$，且 $-2<0<-\ln a$，所以 -2 为满足题意的一个正点了.

在区间 $(-\ln a,+\infty)$，利用不等式 $\mathrm{e}^x\ge 1+x$ 放缩找点.

方法一：因为 $f(x)=\mathrm{e}^x(a\mathrm{e}^x+a-2)-x>\mathrm{e}^x(a\mathrm{e}^x-2)-x$，当 $x\ge\ln\dfrac{3}{a}$ 时，有 $a\mathrm{e}^x-2\ge 1$，则 $f(x)>\mathrm{e}^x-x$，而 $\mathrm{e}^x-x>1>0$，则 $f\left(\ln\dfrac{3}{a}\right)>0$，又 $\ln\dfrac{3}{a}>1$，所以 $\ln\dfrac{3}{a}$ 为满足题意的另一个正点.

方法二：因为 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x>a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=a\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1-\dfrac{3}{a}\right)$，只需取 $x_0=\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$，就有 $f\left(x_0\right)>0$，又 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)>1$，所以 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$ 就是满足题意的一个正点了.

评析：通过对函数式的各项进行比较，基于极限思想，对一些不影响函数变化趋势的项，我们可以通过缩小变量区间的方式放缩为常数，或者利用常见不等式进行放缩，再利用零点存在定理得到零点.

例3 （2018年高考全国卷Ⅱ •理21题(2)）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点，求 a .

分析：由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，判断方程 $f'(x)=0$ 是否有正根比较繁琐，所以对函数 $f(x)$ 作变形，令 $g(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点等价于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点. $a\le 0$ 时没有零点，显然不合. 因为 $g'(x)=\dfrac{ax\left(x-2\right)}{\mathrm{e}^x}$，所以当 $a>0$ 时，当 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=2$ 处取得最小值 $g(2)=1-\dfrac{4a}{\mathrm{e}^2}$，当 $a>\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，$g(2)<0$，因为 $g(0)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$，所以有两个零点，根据零点存在定理，接下来只需要在 $(2,+\infty)$ 内找到正点即可. 在区间 $(2,+\infty)$，因为 $\mathrm{e}^x\ge x+1>x$，则 $\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}\ge\dfrac{x}{3}$，所以 $\mathrm{e}^x\ge\dfrac{x^3}{27}$，所以 $g(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}>1-\dfrac{ax^2}{\frac{x^3}{27}}=1-\dfrac{27a}{x}$，令 $1-\dfrac{27a}{x}=0$，得 $x=27a$，则 $g\left(27a\right)>0$，且 $27a>1$，所以 $27a$ 就是满足题意的一个正点了. 故 $a>\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ 时, $g(x)$ 没有零点. 又易知当 $a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ 时，$g(x)$ 没有零点，$a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$，$g(x)$ 只有一个零点. 综上，a 的取值范围为 $a=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

评析：因为 e^x 相对于幂函数 x^α 在 $x\to+\infty$ 时的高阶无穷大量，将 e^x 缩小为 $\dfrac{x^3}{27}$，仍比 x^2

高阶，不影响函数 $g(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的极限，又得到了容易求解的方程 $1-\frac{27a}{x}=0$. 在对函数的某些项进行放缩的时候，为了使函数的趋势不变，得到我们想要的结果，通常需要对常用不等式进行变形. 变形的方式也很多，需多加训练，才能应用自如.

二、含 $\ln x$ 的初等函数

例 4 已知函数 $f(x)=\ln x+ax+1$ 有两个零点 x_1,x_2，求 a 的取值范围.

分析：因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+a$，所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，故在 $x=-\frac{1}{a}$ 处取得最大值 $f\left(-\frac{1}{a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$，当 $-1<a<0$ 时，$f\left(-\frac{1}{a}\right)>0$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$，所以有两个零点，接下来只需要分别在相应区间内找到负点即可.

在区间 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$，只需取 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，有 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\frac{a}{\mathrm{e}}+1=\frac{a}{\mathrm{e}}<0$，所以 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 就是满足题意的一个负点了.

在区间 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，由 $\ln x\le x-1$，则 $\ln\sqrt{x}\le\sqrt{x}-1$，$\ln x\le 2\left(\sqrt{x}-1\right)<2\sqrt{x}-1$，所以 $f(x)=\ln x+ax+1<2\sqrt{x}+ax$，令 $2\sqrt{x}+ax=0$，得 $x=\frac{4}{a^2}$，所以 $f\left(\frac{4}{a^2}\right)<0$，又 $\frac{4}{a^2}>-\frac{1}{a}$，所以 $\frac{4}{a^2}$ 就是满足题意的一个负点了.

评析：放缩时，需要对函数中各个项进行比较，如本题如果直接用 $\ln x\le x-1$，这样得到 $x-1$ 与 ax 是 $x\to+\infty$ 时的同阶无穷大量，影响了函数的变化趋势，放得“太大”了，通过换元，将其变形为 $\ln x\le 2\left(\sqrt{x}-1\right)<2\sqrt{x}-1$，则 ax 是 $2\sqrt{x}-1$ 在 $x\to+\infty$ 时的高阶无穷大量，符合函数的变化趋势，问题得以解决.

例 5 已知函数 $f(x)=\ln\frac{\mathrm{e}x}{2}-ax$，$g(x)=\frac{x-4a}{x}$. 当 $a>0$ 时，函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 恰有三个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

分析：$h(x)=f(x)-g(x)=\ln\frac{x}{2}-a\left(x-\frac{4}{x}\right)$，因为 $h'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{4a}{x^2}$，所以 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(2)=0$，且 $x_1<2<x_2$，所以 $h(x_1)<0$，$h(x_2)>0$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=-\infty$，$h(x)$ 有三

个零点，接下来只需要分别在相应区间内找到正点负点，就可用零点存在定理求解了.

在区间$(0,x_1)$，限定$x<\frac{1}{a}$，就有$ax<1$，则$h(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+\frac{4a}{x}>\ln x+\frac{4a}{x}-2$，又由$\ln x\le x-1$得$\ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}-1$即$\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$，再用$\sqrt{x}$替换，得$\ln\sqrt{x}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\ln x\ge 2-\frac{2}{\sqrt{x}}$，

则有$h(x)>\ln x+\frac{4a}{x}-2>2\cdot\frac{2a-\sqrt{x}}{x}$，令$2a-\sqrt{x}=0$，得$x=4a^2$（$4a^2<\frac{1}{a}$），所以

$h(4a^2)>0$，且$4a^2<\frac{1}{a}$，所以$4a^2$就是满足题意的正点了.

在区间$(x_2,+\infty)$，限定$x>4a$，则$\frac{4a}{x}<1$，所以$h(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+\frac{4a}{x}<\ln x-ax+2$，由$\ln x\le x-1$，得$\ln x<2\sqrt{x}-2$，所以$h(x)<2\sqrt{x}-2-ax+2=2\sqrt{x}-ax$，令$2\sqrt{x}-ax=0$，

得$x=\frac{4}{a^2}$，所以$h\left(\frac{4}{a^2}\right)<0$，且$\frac{4}{a^2}>4a$，所以$\frac{4}{a^2}$就是满足题意的负点了.

通过找点来确定函数零点个数是一类很有挑战性的问题，基于极限思想，找出零点左右两侧的正点、负点就有了方向.教师要引导学生结合函数模型，利用极限思想得到函数变化趋势，再应用常见的不等式进行放缩，多观察归纳，多整理反思，必能更快找到更加“优美”的点，从而揭秘零点问题！

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系，《数学分析》（上册）[M]，高等教育出版社，2010 年 7 月第四版：61-66