以三角函数为载体的导数问题求解策略

福建省莆田第二中学　　蔡海涛

本文系 2019 年度福建省基础教育课程教学研究课题《核心素养导向下高中数学阅读教学模式的研究》(课题编号:MJYKT2019-106)的研究成果.

【摘要】以三角函数为载体的函数导数问题，可充分结合三角函数的特征进行求解，常用策略有：逐个区间讨论、三角函数有界性、周期性、换元法等.

【关键词】函数导数　三角　求解策略

2019 年全国Ⅰ卷理科第 20 题和文科第 20 题均考查以三角函数为载体的导数问题，让人眼前一亮.这类函数表达式中含有三角函数，无论怎么求导，仍含有三角函数，构成解题中的难点. 由于三角函数的特点，破解这类函数与导数问题，除了使用求解导数问题的常规方法外，还可充分结合三角函数的性质，解法上有种特别的“三角味”，很好地彰显解法的灵活性、多样性与独创性，从而备受命题者的青睐.笔者通过研究近年高考及模拟考试中与三角函数有关的导数题，探究这种“三角味”的解题策略，期抛砖引玉.

一、逐个区间分析解决零点问题

例 1（2019 年高考全国Ⅰ卷·理 20）已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1） $f'(x)$ 在区间 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2） $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

解析（1）略.

（2） $f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，由（1）知 $f'(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 有唯一极大值点 α.

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)$=0，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)$=0，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.又 $f(0)$=0，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)>0$.

从而，$f(x)$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$没有零点.

（iii）当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减. 而$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$有唯一零点.

（iv）当$x\in(\pi,+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，所以$f(x)<0$，从而$f(x)$在$(\pi,+\infty)$没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有2个零点.

点评 利用导数确定函数零点，解题思路是对函数求导，研究其单调性、极值，得到函数的大致图象，数形结合得到零点个数. 本题求导后首先发现函数$f'(x)$有一个零点$x=0$，考虑三角函数在各个区间的不同符号，从而不直接把$f'(x)$看做一个整体来研究，而是把它分成$\cos x$与$\dfrac{1}{1+x}$两部分，逐个区间分析，研究各自部分的符号，使得导函数在$(-1,\dfrac{\pi}{2})$的零点全部解出，从而破解了本题的难点. 由于三角函数在各个象限符号的变化及周期性，研究三角函数的零点问题，常用逐个区间分析法.

二、利用三角函数的有界性求最值、证明不等式

例 2 已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2x-\cos x$.

（1）当$x\in\left(-\infty,0\right)$时, 求证: $f\left(x\right)>0$；

（2）若函数$g(x)=f\left(x\right)+\ln(x+1)$，求证：函数$g(x)$存在极小值.

解析 (1)依题意，$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2+\sin x$，当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，

故函数$f\left(x\right)$在区间$\left(-\infty,0\right)$单调递减，故$f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$.

（2）依题意，$g(x)=\mathrm{e}^{x}-2x-\cos x+\ln(x+1)$，

令$h(x)=g'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x+1}+\sin x-2$，则$h(0)=0$；

而$h'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^{2}}+\cos x$，可知当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$h'\left(x\right)>0$，

故函数$h(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增，当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$h(x)=g'(x)>g'(0)=0$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，函数 $h'(x)$ 单调递增，而 $h'(0)=1$，

又 $h'(-\frac{9}{10})=e^{-\frac{9}{10}}+\cos(-\frac{9}{10})-100<0$，故 $\exists x_0\in\left(-\frac{9}{10},0\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，

所以 $\exists x\in(x_0,0)$，使得 $h'(x)>0$，即函数 $h(x)=g'(x)$ 单调递增；

所以当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g'(x)<g'(0)=0$，则函数 $g(x)$ 在 $(x_0,0)$ 单调递减，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，所以 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 有极小值 $g(0)=0$.

点评　根据三角函数的有界性，有 $|\sin x|\leqslant 1$ 及 $|\cos x|\leqslant 1$. 本题第（1）问即利用 $\sin x\leqslant 1$ 这个性质，判断出 $f'(x)<0$，从而第一步轻松获解. 一般地，研究函数单调性判断导函数的符号时，关注三角函数的有界性便于判断符号. 本题第(2)问先构造函数 $h(x)=g'(x)$，由逐个区间分析法易得当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，从而 $h(x)=g'(x)>g'(0)=0$，进而研究 $h'(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 时的符号，显然 $h'(0)=1$，直观感知当 $x\to -1$ 时，$h'(x)<0$，但如何取函数 $h'(x)$ 在 $x\in(-1,0)$ 的零点是一个难点，这里仍关注三角函数的有界性，取一个接近 -1 的数，如取 $-\frac{9}{10}$，可得 $h'(-\frac{9}{10})<0$，从而突破了本题的难点.

三、用切线解决恒成立问题

例 3 已知函数 $f(x)=e^x-a\sin x$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

解析 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x$，符合条件.

当 $a>0$ 时，设函数 $y=e^x$ 与 $y=a\sin x$ 的图象在点 (x_0,y_0) 处有公切线(其中 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$)，

则 $\begin{cases}e^{x_0}=a\sin x_0\\ e^{x_0}=a\cos x_0\end{cases}\Rightarrow \tan x_0=1\Rightarrow x_0=\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，故 $0<a\leqslant\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$；

当 $a<0$ 时，设函数 $y=e^x$ 与 $y=a\sin x$ 的图象在点 (x_0,y_0) 处有公切线(其中 $x_0\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$)，

同理可得 $-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\leqslant a<0$. 综上，$a$ 的取值范围为 $\left[-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right]$.

点评 本题若直接研究函数 $f(x)$ 的单调性及最值，将很难求解. 因此首先把问题转化为

函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在 $y=a\sin x$ 的图象上方，进而对 a 进行讨论，考虑 $y=a\sin x$ 的有界性及图象特征，研究两个函数图象的公切线，从而得到 a 的最值，进而求得范围. 一般地，两个函数的图象分别被某条直线隔离，这种图形特征与不等式恒成立问题即有着非常密切的联系，若直接证明比较复杂，可以利用导数的几何意义得到曲线的切线方程，对欲证式子进行放缩，再利用不等式的传递性进行证明.

四、利用不等式"$\sin x<x\left(x>0\right)$"解决恒成立问题

例 4 已知函数 $f(x)=ax-\sin x\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 不单调，求 a 的取值范围；

(2) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)<\dfrac{x^3}{6}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析 (1) 由已知，得 $f'(x)=a-\cos x$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$0<\cos x<1$.

（i）当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，不合题意；

（ii）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，不合题意；

（iii）当 $0<a<1$ 时，由 $f'(x)=a-\cos x=0$，得 $\cos x=a$，则存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $\cos x_0=a$.

可得 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\ x_0\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 不单调. 综上，a 的取值范围为 $\left(0,1\right)$.

（2）由 (1) 知，$a=1$ 时，$ax>\sin x$，即 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时有 $\sin x<x$，从而 $\sin^2\dfrac{x}{2}<\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

令 $g(x)=ax-\sin x-\dfrac{x^3}{6}$，

则 $g'(x)=a-\cos x-\dfrac{x^2}{2}=a-1+2\sin^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2}<a-1+2\times\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{2}=a-1$.

（i）当 $a \leqslant 1$ 时，$g'(x) \leqslant 0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$g(x) < g(0) = 0$，满足题意.

（ii）当 $a > 1$ 时，设 $h(x) = g'(x) = a - \cos x - \frac{x^2}{2}$，则当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$h'(x) = \sin x - x < 0$，

从而 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减 ，于是 $a - \frac{\pi^2}{8} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) < h\left(x\right) < h(0) = a - 1$，分情况讨论：

①当 $a \geqslant \frac{\pi^2}{8}$ 时，$h(x) > 0$，即 $g'(x) > 0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增 ，$g(x) > g(0) = 0$ ，不满足题意.

②当 $1 < a < \frac{\pi^2}{8}$ 时，必 $\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h\left(x_0\right) = 0$，所以当 $0 < x < x_0$ 时，$g'(x) = h(x) > 0$，

函数 $g(x)$ 在 $\left(0, x_0\right)$ 上单调递增，当 $x \in \left(0, x_0\right)$ 时，$g(x) > g(0) = 0$，不满足题意.

综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty, 1\right]$.

点评　本题第(1)问利用导数研究函数的单调性,由于导函数中含有字母参数,需要对参数进行讨论，根据 $0 < \cos x < 1$，得到对 a 讨论的分界点，下面的求解就不难了.第(2)问充分地利用当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x < x$ 这个不等式，从而有 $\sin^2 \frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2$，在式子进行放缩变形的同时，实现“超越式”到“非超越式”的转化，突破了难点.一般地，当 $x > 0$ 时，要注意“$\sin x < x$”这个不等式的应用.

五、利用三角函数的周期性解决与数列交汇问题

例5 已知函数 $f(x) = x\sin x + \cos x (x > 0)$，记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $i (i \in N^*)$ 个极值点，证明：$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{9} (n \geq 2, n \in N^*)$.

解析 由 $f'(x) = 0$ 及 $x > 0$ 得 $x_i = \frac{2n-1}{2}\pi$，

所以 $\frac{9}{4} \times \frac{1}{x_i^2} = [\frac{3}{(2n-1)\pi}]^2 < \frac{1}{(2n-1)^2}$，

$$\frac{9}{4}(\frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_i^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n-1}) < \frac{1}{2}$.

即 $\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{9} (n \geq 2, n \in N^*)$.

点评 三角函数的周期性是三角函数的一条重要性质.根据这个性质,需要关注以三角函数为载体的函数零点可能有多个，同时关注与数列交汇来进行考查的问题.

六、利用换元转化

例6 若 $x \geq 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{2+\cos x} \leq ax$，求 a 的取值范围.

解析 设 $h(x)=ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}(x \geq 0)$，$h'(x)=a-\dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$，

设 $t=\cos x, t\in[-1,1]$，$\varphi(t)=\dfrac{1+2t}{(2+t)^2}$，$\varphi'(t)=-\dfrac{2(t+2)(t-1)}{(2+t)^4}=-\dfrac{2(t-1)}{(2+t)^3} \geq 0$

所以 $\varphi(t)$ 在 $[-1,1]$ 上递增，则 $\varphi(t)$ 的值域为 $[-1,\dfrac{1}{3}]$，

①当 $a \geq \dfrac{1}{3}$ 时，$h'(x) \geq 0$，$h(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数，$h(x) \geq h(0)=0$，满足题意；

②当 $a \leq 0$ 时，因为 $h(\dfrac{\pi}{2})=a\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}<0$，所以不合题意，舍去；

③当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $h(x)<ax-\dfrac{\sin x}{3}$，

令 $t(x)=ax-\dfrac{\sin x}{3}$，$t'(x)=a-\dfrac{\cos x}{3}$，

存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $x\in(0,x_0)$ 时，$t''(x)<0$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，则 $t(x_0)<t(0)=0$，

即在 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，故不合题意.

综上，a 的取值范围为 $[\dfrac{1}{3},+\infty)$.

点评 对一个较复杂的三角函数式，先观察式中几部分之间的联系，利用换元可使得式子简化，同时实现了“超越式”到“非超越式”的转化，换元时须注意新变量的取值范围.

由上例的解题策略可以发现,以三角函数为载体的导数问题要充分结合三角函数的特点（逐个区间分析、有界性、放缩法、周期性、换元转化等），找出对解题有用的特征，研究解决问题的进展情况，把表征题目中文字、符号、图表等信息与认知结构中已有的观念进行同化，从而达到解题的目的.

参考文献：

赵雄辉,刘云章.怎样教解题——波利亚数学教育著作选讲[M].长沙:湖南教育出版社，2015.