着力一题多解 引领学生思考

——以一道高三质检题为例

蔡海涛

本文以一道高三质检题为例，提供了多种解题思路，兼顾了解题的通性通法和特殊解答技巧，引领学生进行解题反思，归纳和提炼解题思想和方法，并在解题教学层面进行了深入思考，旨在培养学生的数学核心素养.

一、试题呈现

（2020年莆田市高三第三次质检 •理21）设函数 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=a\mathrm{e}^{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线也与曲线 $y=g(x)$ 相切，求 a 的值.

(2)若函数 $G(x)=f(x)-g(x)$ 存在两个极值点.

①求 a 的取值范围；②当 $a\mathrm{e}^{2}\geqslant2$ 时，证明：$G(x)<0$.

二、解法探究

(1) $a=\mathrm{e}^{-2}$.(2) ① a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.(过程略)

②解法一:

证明:设 $F(x)=\dfrac{G(x)}{x}=\ln x-\dfrac{a\mathrm{e}^{x}}{x}$，$F'(x)=\dfrac{x-a(x-1)\mathrm{e}^{x}}{x^{2}}$，

当 $0<x\leqslant1$ 时，因为 $a\geqslant\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2}}$，所以 $F'(x)>0$，则 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递增，

所以 $F(x)\leqslant F(1)=-a\mathrm{e}<0$.

当 $x>1$ 时, $F'(x)=-\dfrac{a(x-1)}{x^{2}}\left[\mathrm{e}^{x}-\dfrac{x}{a(x-1)}\right]$,

令 $H(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{x}{a(x-1)}$，则 $H'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{a(x-1)^{2}}>0$，

因为 $a\geqslant\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2}}$，所以 $H(2)=\dfrac{a\mathrm{e}^{2}-2}{a}\geqslant0$. 取 $m\in(1,2)$，且使 $\dfrac{m}{a(m-1)}>\mathrm{e}^{2}$，

即 $1<m<\dfrac{a\mathrm{e}^{2}}{a\mathrm{e}^{2}-1}$，则 $H(m)=\mathrm{e}^{m}-\dfrac{m}{a(m-1)}<\mathrm{e}^{2}-\mathrm{e}^{2}=0$，因为 $H(m)\cdot H(2)\leqslant0$，

故 $H(x)$ 存在唯一零点 $x_{0}\in(1,2)$，所以 $F(x)$ 有唯一的极大值点 $x_{0}\in(1,2)$.

由 $H(x_{0})=0$，可得 $\mathrm{e}^{x_{0}}=\dfrac{x_{0}}{a(x_{0}-1)}$，故 $F(x_{0})=\ln x_{0}-\dfrac{1}{x_{0}-1}$，$x_{0}\in(1,2)$.

因为 $F'(x_{0})=\dfrac{1}{x_{0}}+\dfrac{1}{(x_{0}-1)^{2}}>0$，所以 $F(x_{0})$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，

所以 $F(x_{0})<F(2)=\ln2-\dfrac{a\mathrm{e}^{2}}{2}\leqslant\ln2-1<0$.

综上，当$ae^2 \geqslant 2$时，均有$\frac{G(x)}{x} < 0$，即$G(x) < 0$.

评注：这个解法是官方提供的唯一参考答案，此法的思路为求$G(x)$的最值，故考虑对其进行求导，发现导函数较为复杂，所以将其转化为求函数$F(x)=\frac{G(x)}{x}=\ln x-\frac{ae^x}{x}$的符号，简化了下一步的求导运算，突破了本题的第一个难点. 进而分析$F'(x)$的符号，当$0<x\leqslant 1$时，易知$F'(x)>0$，从而得$F(x)<0$. 当$x>1$时，对$F(x)$求导得$F'(x)=-\frac{a(x-1)}{x^2}\left[e^x-\frac{x}{a(x-1)}\right]$，进而研究函数$H(x)=e^x-\frac{x}{a(x-1)}$，得$H(x)$在区间$(1,2)$存在唯一隐零点$x_0$，再由$F(x_0)$单调性得$F(x_0)<0$，突破了本题的第二个难点，本题得证. 法一的基本思路为$G(x)<0 \Leftarrow G(x)_{\max}<0 \Leftarrow F(x)_{\max}<0$，思路直接，但在当$x>1$时的讨论比较复杂.

②**解法二:**

证明：由$ae^2 \geqslant 2$，得$a \geqslant \frac{2}{e^2}$. 欲证$G(x)=x\ln x-ae^x<0$，即证$a>\frac{x\ln x}{e^x}$.

(i) 当$0<x<1$时，$\frac{x\ln x}{e^x}<0$，成立；

(ii) 当$x \geqslant 1$时，设$h(x)=\frac{x\ln x}{e^x}$，则$h'(x)=\frac{\ln x+1-x\ln x}{e^x}$.

设$u(x)=\ln x+1-x\ln x,(x \geqslant 1)$，则$u'(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$.

又$u'(x)$在区间$[1,+\infty)$单调递减，所以$u'(x) \leqslant u'(1)=0$，即$u(x)$在$[1,+\infty)$为减函数.

又$u(2)=1-\ln 2>0$，$u(3)=1-2\ln 3<0$，
所以$\exists x_0 \in (2,3)$，使得$h'(x_0)=0$，即$\ln x_0+1-x_0\ln x_0=0$. （*）

则当$1<x<x_0$时，$h'(x_0)>0$，$h(x)$为增函数；当$x>x_0$时，$h'(x_0)<0$，$h(x)$为减函数.

所以$h(x) \leqslant h(x_0)=\frac{x_0\ln x_0}{e^{x_0}}=\frac{\ln x_0+1}{e^{x_0}}$（代入*可得）

$<\frac{x_0}{e^{x_0}}<\frac{2}{e^2}$. （$\ln x_0<x_0-1$, 且$y=\frac{x}{e^x}$在$(2,3)$上为减函数）

由(i) (ii)得，$a>\frac{x\ln x}{e^x}$，所以原命题成立.

评注：此法的思路是通过分离变量转化为要证$a>\frac{x\ln x}{e^x}$，即证$\frac{2}{e^2}>\left(\frac{x\ln x}{e^x}\right)_{\min}$，故对函数$h(x)=\frac{x\ln x}{e^x}$求导，研究其单调性，得到$h'(x)=0$的隐零点$x_0$，进而得到$h(x)_{\max}=h(x_0)$，再由$h(x_0)<\frac{2}{e^2}$证之. 法二的基本思路类似法一，都是转化求函数的最值，区别之处在于先对参数进行分离，使得运算简化.

②解法三:

证明:要证原不等式成立，只须证 $x\ln x<a\mathrm{e}^{x}$，因为 $a\mathrm{e}^{2}\geqslant 2$，故只须证 $x\ln x<2\mathrm{e}^{x-2}$，

即证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$. 令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，易得 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增，

在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减，所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

令 $m(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$，则 $m'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}(x-2)}{x^{3}}$，

则 $m(x)$ 区间 $(0,2)$ 单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增，

所以 $m(x)\geqslant m(2)=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\mathrm{e}}\geqslant\varphi(x)$，即 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$，得证.

评注：此法的思路是先利用 $a\mathrm{e}^{2}\geqslant 2$，把问题转化为证明 $x\ln x<2\mathrm{e}^{x-2}$，从而消去参数，突破了难点，进而进一步等价变形为 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}$，由 $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max}<\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x^{2}}\right)_{\min}$ 证之. 若将要证不等式转化为 $\ln x-\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}<0$，构造函数证明会比较复杂，所以把 $\ln x$ 与 e^{x} 分离在不等式两边进行处理，这种解法称“分而治之”. 一般地，对于形式比较复杂的函数，往往需要合理拆分与变形，一般转化为只含有一个“超越式”的函数进行处理.

②解法四:

证明：同解法三，即证 $x\ln x<2\mathrm{e}^{x-2}$，只须证 $\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}>\ln x$.

函数 $\varphi(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，易证 $\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}\geqslant\dfrac{1}{2}x$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立. 易证得 $\dfrac{1}{2}x>\ln x$，故 $\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}>\ln x$.

评注：函数 $\varphi(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}$ 为凹函数，函数 $g(x)=a(2\ln x+1)$ 为凸函数，利用切线进行放缩转化得到证明.

三、高考链接

1.（2018 年高考全国卷Ⅰ•文科 21）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x}-\ln x-1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点．求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明：当 $a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

2.（2015 年高考全国卷Ⅰ•文科 21）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

(1) 讨论 $f\left(x\right)$ 的导函数 $f'\left(x\right)$ 零点的个数；

(2) 证明：当 $a>0$ 时 $f\left(x\right)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

3.（2014 年高考全国卷Ⅰ•理科 21）设函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$.

（1）求 a,b；（2）证明：$f(x)>1$.

四、变式拓展

变式 1: 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\ln x+2}{\mathrm{e}^{x}}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $x>0$ 时，都有 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$.

解:（1）函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减；(过程略)

（2）要证明 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$，即证 $\left(1-x-x\ln x\right)\ln\left(x+1\right)<\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}\right)x$，

令 $g\left(x\right)=1-x-x\ln x$，则 $g'\left(x\right)=-1-\left(\ln x+1\right)=-2-\ln x$，

当 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}$ 时，$g'\left(x\right)>0$，当 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}$ 时，$g'\left(x\right)<0$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}},+\infty\right)$ 上单调递减，$g\left(x\right)\leqslant 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2}}=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}$，

所以 $1-x-x\ln x\leqslant 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}$. 又易证 $\ln\left(x+1\right)<x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以 $0<\ln\left(x+1\right)<x$，则 $\left(1-x-x\ln x\right)\ln\left(x+1\right)<\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}\right)x$，

综上，当 $x>0$ 时，都有 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$.

评注: 对于含有 $\ln x$ 与 e^{x} 型的超越函数，具体解决时须根据两类函数的特点，挖掘结构特征，灵活变形，脑中有“形”，注意重要不等式 $\ln x\leqslant x-1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x}\geqslant x+1$ 的合理代换.

变式 2: 若关于 x 的不等式 $\mathrm{e}^{2x}-a\ln x\geqslant\dfrac{1}{2}a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解法一: 由题意得 $2\mathrm{e}^{2x}\geqslant a\left(2\ln x+1\right)$，即函数 $f\left(x\right)=2\mathrm{e}^{2x}$ 的图象在函数 $g\left(x\right)=a\left(2\ln x+1\right)$ 图象的上方，显然当 $a<0$ 时，不合题意；当 $a=0$ 时，符合题意；

当 $a>0$ 时，临界值为两曲线相切时取得，设切点横坐标为 t，则有

$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$，即$\begin{cases} 2\mathrm{e}^{2t}=a(2\ln t+1) \\ 4\mathrm{e}^{2t}=\dfrac{2a}{t} \end{cases}$，解得$\begin{cases} t=1 \\ a=2e^{2} \end{cases}$，

故 a 的取值范围为$\left[0,2\mathrm{e}^{2}\right]$.

解法二：由题意得 $\mathrm{e}^{2x}\geqslant a\left(\ln x+\dfrac{1}{2}\right)$，即 $\mathrm{e}^{2x}\geqslant a\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}x\right)$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}x\right)\geqslant 0$ 恒成立，

显然当 $a<0$ 时，不合题意；当 $a=0$ 时，符合题意；

当 $a>0$ 时，$\mathrm{e}^{2x}\geqslant\dfrac{a}{2}\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}x\right)^{2}$，所以 $\dfrac{a}{2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln\left(\mathrm{e}x^{2}\right)}$ 恒成立，而 $\mathrm{e}^{2x}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}\geqslant(\mathrm{e}x)^{2}$，

$\ln\left(\mathrm{e}x^{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}x^{2}=x^{2}$，当且仅当 $x=1$ 时以上等号成立，所以 $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln\left(\mathrm{e}x^{2}\right)}\right)_{\min}=\dfrac{(\mathrm{e}x)^{2}}{x^{2}}=\mathrm{e}^{2}$，

所以 $\dfrac{a}{2}\leqslant\mathrm{e}^{2}$，即 $0<a\leqslant 2\mathrm{e}^{2}$，故 a 的取值范围为$\left[0,2\mathrm{e}^{2}\right]$.

评注：解法一是从函数的图象入手，函数 $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$ 是凹函数，函数 $g(x)=a(2\ln x+1)$ 是凸函数，通过两函数的公切线来进行转化；解法二对参数进行分离，转化为求$\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln\left(ex^{2}\right)}\right)_{\min}$，再利用不等式“$\mathrm{e}^{x}\geqslant\mathrm{e}x$”及“$\ln x\leqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}}$”进行放缩得到最小值. 两种解法的过程不同，但基本思路相同，均是利用切线放缩对凹函数与凸函数进行转化.

五、教学启示

1. 解题教学的启示

在解题教学中，教师常常采用“一题多解”，让学生从多种思维角度来思考问题，既要重视通性通法，又要关注特法巧解，解后引导学生对解题方法进行归纳，思想上进行引领. 指数对数组合型的函数不等式问题，常用的解题方法有三种：一是指数对数分离并向易于求最值的常用函数转化；二是利用放缩消掉指数函数或对数函数之一，再进行处理；三是隐零点法.对于具体问题，可根据函数特征具体分析，选择合适方法求解.

解题教学还常常对问题进行变式，变式通过 “变中发现不变”来学习抽象化和 “以不变应万变”来学习公理化，以此来解决数学教学中的核心问题——“抽象化”和“公理化”. 基于突出数学本质的解题教学，不应局限在解题方法的展示，更应引导学生课中、课外注重知识背后的数学思想、方法的贯通，注重形、数之间的结合，引导学生进行学习内容逻辑线索的梳理，强化在数学实践活动中综合运用数学知识的能力，从不同角度思考问题，由此建立起知识体系，从而能以一览众山小的姿态来看待数学问题.

2. 精选例题，聚焦高考

教师讲解模拟卷的典型试题，应聚焦高考试题，进行高考试题对点链接，引导学生学会归纳试题的共性，学会应对试题创新变化、看破迷雾、提升抓住问题本质的能力. 高考压轴题都具有一定的创新性，解题教学中，教师应努培养学生的发散思维，拓宽学生的视角，只有这样，才能让学生做到“以不变应万变”，笑傲考场.

3. 引领学生深度思考

解题教学教师应引领学生深度思考，引导学生从不同视角、不同方向进行观察、类比、联想，引领学生深度思考，思考一题多解、一题多变、多题一解、多解归一；思考答题难点

是什么，为什么不会？这种解法能否推广？思考这道题还可以得到哪些结论，条件结论能否互换.

通过思考，获取问题的内在联系，关注学习内容的有机整合；注重知识学习的批判理解；着意学习过程的建构反思；重视学习的迁移运用和问题解决，从而领悟数学之美，提升核心素养.