空间几何体外接球问题模型化及备考策略化

1 卢妮　　　2 蔡海涛　 3 潘敬贞

（1.2 福建省莆田第二中学　 3.广东省广东省汕头市澄海华侨中学　　）

摘要：纵观近年高考题，立体几何中外接球问题的试题频频出现.本文研究外接球问题最适应的方法，探究其解题策略.

关键词：高考立体几何　　外接球

在近年高考中悄然兴起的立体几何与多面体相关的外接球问题，如 2020 年全国卷Ⅰ理科第 10 题，2020 年全国卷Ⅰ文科第 12 题，2020 年全国卷 II 理科第 10 题，2020 年全国卷 II 文科科第 11 题，2019 年全国卷Ⅰ理科第 12 题，2018 年全国卷Ⅲ文科第 12 题，2017 年全国卷Ⅰ文科第 16 题，2017 年全国卷Ⅲ理科第 8 题，2015 年全国卷 II 理科第 9 题，2015 年全国卷Ⅲ文科第 10 题……从题型上看是 5 分小题，可能是选择题，也可能是填空题；从难易程度上看，属于中、低档难度问题.这类试题对学生来说，是个不小的挑战，实测情况考生得分率较低.

著名数学教育家波利亚认为解题过程分为弄清问题、拟定计划、实现计划、反思回顾等四个阶段,并据此给出了颇具启发性的"怎样解题"表. 波利亚把传统的单纯解题发展为通过解题获得新知识的新技能的学习过程,他的目标不是找出可以机械地用于解决一切问题的"万能方法"，而是希望通过对于解题过程的深入分析，特别是，由已有的成功实践，总结出一般的方法或模式，使得在以后的解题中可以起到启发作用[1].另外,我们该如何避免在考场现找思路，进行复杂的运算?

基以此,本文从外接球的相关知识，引导学生解题时有条理的思考,寻找一个模型,把不熟悉的问题转化为熟悉的模型,帮助学生有效积累解题经验和解题略.

1 外接球的相关知识点

1.1 外接球的定义

若一个多面体的各个顶点都在一个球的球面上，则称这个多面体是这个球的内接多面体，这个球是这个多面体的外接球.

1.2 性质

性质(1):过球心与小圆圆心的直线垂直于小圆所在的平面（类比：圆的垂径定理）；

性质(2): 在同一球中，过两相交圆的圆心垂直于相应的圆面的直线相交，交点是球心（类比：在同圆中，两相交弦的中垂线交点是圆心）.

2 试题模型化与解题策略化

2.1 长方体模型

例 1.（2019 年高考全国卷Ⅰ•理科第 12 题）已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，ΔABC 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别是 PA，PB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为（　）

A．$8\sqrt{6}\pi$　 B．$4\sqrt{6}\pi$　C．$2\sqrt{6}\pi$　D．$\sqrt{6}\pi$

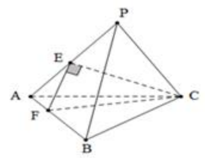

图 1

分析：如图 1，先证得 $PB\perp$ 平面 PAC，再求得 $PA=PB=PC=\sqrt{2}$，从而得 $P-ABC$ 为正方体一部分，进而知正方体的体对角线即为球直径.

简解:如图 1，因为 $PA=PB=PC$，ΔABC 为边长为 2 的等边三角形，所以 $P-ABC$ 为正三棱锥，所以 $PB\perp AC$，又 E，F 分别是 PA，PB 的中点，所以 $EF//PB$，所以 $EF\perp AC$，又 $EF\perp CE$，$CE\bigcap AC=C$，所以 $EF\perp$ 平面 PAC，$PB\perp$ 平面 PAC，所以 $\angle APB=90^\circ$，所以 $PA=PB=PC=\sqrt{2}$,所以 $P-ABC$ 为正方体一部分，$2R=\sqrt{2+2+2}=\sqrt{6}$，即 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{6\sqrt{6}}{8}=\sqrt{6}\pi$.故选 D.

解题策略

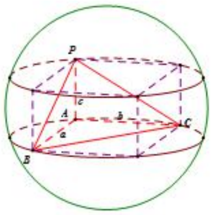

图 2

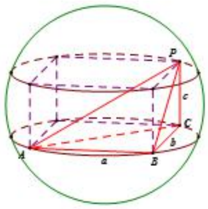

图 3

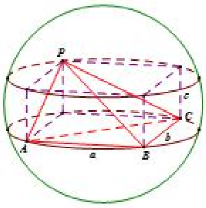

图 4

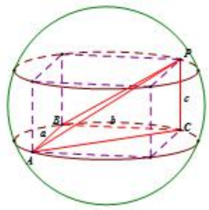

图 5

如图 2 至 5，三条棱两两垂直，可以看成长方体的一部分,不找球心的位置也可求出球半径.因为长方体的外接球的球心在体对角线的交点处，即长方体的体对角线的中点是球心.

找三条两两垂直的线段，直接用公式 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$，即 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，求出 R.

2.2 对棱相等三棱锥模型

例 2 正四面体的各条棱长都为 $\sqrt{2}$，求该正四面体外接球的体积.

分析：如图 6，正四面体对棱相等的模式，放入正方体中，$2R=\sqrt{3}$，$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

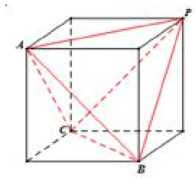

图 6

解题策略 三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，求外接球半径.如图 7，构造一个长方体，使得三棱锥的六条棱分别是长方体各个面的对角线，$AD=BC=x$，$AB=CD=y$，$AC=BD=z$.设长方体的长宽高分别为 a，b，c，根据长方体模型，$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}}$，求出 R.

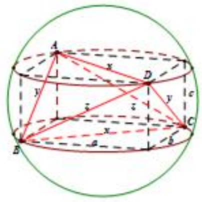

图 7

2.3 定位球心位置模型

例 3（2020 年高考全国卷Ⅰ•理科第 10 题/2020 年高考全国卷Ⅰ•文科第 12 题）

已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为（　　）

A．64π　　B．48π　　C．36π　　D．32π

分析　如图 8,由已知可得等边 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，进而求出其边长，得出 OO_1 的值，根据球的截面性质(1)，求出球的半径，即可得出结论.故选：A.

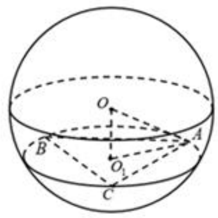

图 8

例 4（2020 年高考全国卷 II•理科第 10 题/2020 年高考全国卷 II•文科第 11 题）

已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的球面上.若球 O 的表面积为 16π，则 O 到平面 ABC 的距离为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

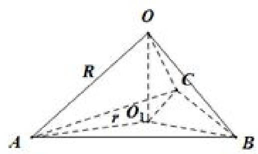

图 9

分析　如图 9, 根据球O的表面积和$\triangle ABC$的面积可求得球O的半径R和$\triangle ABC$外接圆半径r，由球的性质可知所求距离$d=\sqrt{R^2-r^2}$. 故选：C.

解题策略　取ΔABC的外心O_1, 过O_1作平面ABC的垂线，在该垂线上取点O，连接OA，OA即为外接球半径, 由性质(1)得：$R^2=OA^2=O_1A^2+O_1O^2$.

例 5（2017 年高考全国卷Ⅲ•理科第 8 题）已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为(　　)

A．π　　B．$\dfrac{3\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{\pi}{4}$

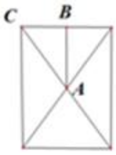

图 10

分析:如图 10，画出圆柱的轴截面，$AC=1$，$AB=\dfrac{1}{2}$，所以$r=BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，那么圆柱的体积是$V=\pi r^2h=\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times1=\dfrac{3}{4}\pi$，故选$B$.

解题策略　如图 11 至 12, 一条棱垂直于一个面的棱锥、直棱柱、圆柱. h为高，r为底面半径或外接圆半径，遇到到后者，补形成圆柱，三角形外接圆半径可用正弦定理求解. 外接球的半径$R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$.

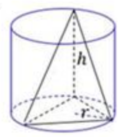

图 11

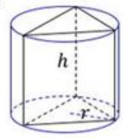

图 12

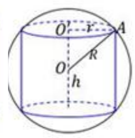

图 13

例 6 在边长为$2\sqrt{3}$的菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60^\circ$，沿对角线BD折成二面角$A-BD-C$为120°的四面体$ABCD$，则此四面体的外接球表面积为____.

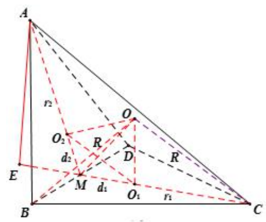

图 14

分析　如图 14, 取BD的中点M, $\triangle ABD$和$\triangle BCD$的外接圆半径为$r_1=r_2=2$, $\triangle ABD$和$\triangle BCD$的外心O_1, O_2到弦BD的距离（弦心距）为$d_1=d_2=1$，四边形OO_1MO_2的外接圆直径$OM=2$，$R=\sqrt{7}$，$S=28\pi$

解题策略　如果找到球心位置，自然就找到了半径，外接球的问题就自然就可以解决.

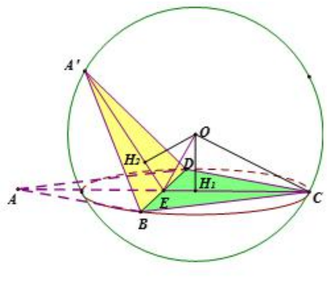

图 15

第一步：先画出如图 15 所示的图形，将ΔBCD画在小圆上，找出ΔBCD和$\Delta A'BD$的外心H_1和H_2；

第二步：过H_1和H_2分别作平面BCD和平面$A'BD$的垂线，由性质(2), 两垂线的交点即为球心O，连接OE,OC；

第三步：解ΔOEH_1，算出OH_1，在$Rt\Delta OCH_1$中，勾股定理：$OH_1^2+CH_1^2=OC^2$

注：易知O,H_1,E,H_2四点共面且四点共圆，证略.

在高三复习中,教师可从全国各地高考真题中抽取出以上题型的试题,并组成相应的题库,进行试题模式化与策略化教学,有意识的引导学生在解题中识别题型,有效地促进学生将陌生问题转化为熟悉题型的能力,加快解题速度,达到事半功倍之效.

参考文献：

[1]波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].上海：科技教育出版社，2007